Estatística II

Licenciatura em Gestão do Desporto

2.º Ano/2.º Semestre

2025/2026

Aulas Teórico-Práticas N.^{os} 16 e 17 (Semana 9)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas Teórico-Práticas (Semanas 1 a 3)	Aulas Teórico-Práticas (Semanas 4 a 7)	Aulas Teórico-Práticas (Semanas 7 a 9)	Aulas Teórico-Práticas (Semanas 10 a 13)
• **Capítulo 1**: Revisões e Distribuições de Amostragem	• **Capítulo 2**: Estimação	• **Capítulo 3**: Testes de Hipóteses	• **Capítulo 4**: Modelo de Regressão Linear Múltipla

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

1

Inferência Estatística

Definição e Construção de Testes de Hipóteses

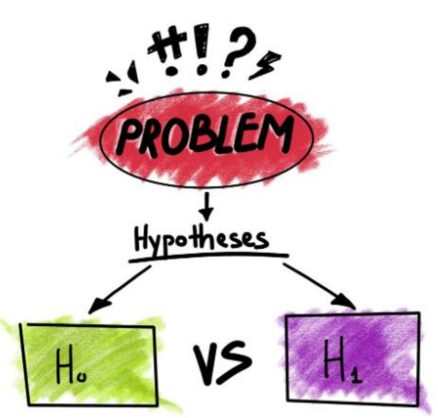
Teste de Hipóteses

- ✓ Procedimento que conduz a uma tomada de decisão, com base na informação fornecida pelos dados recolhidos, sobre a aceitação ou a não aceitação de determinada hipótese estatística que se coloca sobre uma ou mais populações.

"A **Statistical Test** is a way to evaluate the evidence the data provides against a hypothesis. This hypothesis is called **the null hypothesis (**H0). H0 is usually opposed to a hypothesis called the **alternative hypothesis** (H1).

If the data does not provide enough evidence against H0, H0 is not rejected. If instead, the data shows strong evidence against H0, H0 is rejected and H1 is considered as true with a quantified (low) risk of being wrong.

A **Statistical Test** allows to reject/not to reject H0."



Hipótese é uma afirmação	Em uma certa população as médias de tempo de recuperação dos indíduos que tomam um certo remédio e daqueles que não tomam são iguais
O teste de hipótese é uma pergunta	Será que em uma certa população as médias de tempo de recuperação dos indíduos que tomam um certo remédio e daqueles que não tomam são iguais?
O resultado do teste é uma resposta	Com base na amostra pode-se dizer que - Não há indícios de diferença estatisticamente significativa no tempo médio de recuperação entre os que tomam e os que não tomam o remédio, ou - Há indícios de diferença estatisticamente significativa no tempo médio de recuperação entre os que tomam e os que não tomam o remédio

Qual o Teste Estatístico a Usar?

Depende de vários factores:

- Tipo de efeito que se pretende testar
- Nº de variáveis envolvidas
- Nível de medição das variáveis
- Independência das observações
- Outras características dos dados (tipo de distribuição de frequências, igualdade de variâncias, etc)

Testes Paramétricos vs Testes Não-Paramétricos

Testes Paramétricos:

- **Fazem pressupostos sobre a distribuição** dos dados:
  - Exigem a normalidade em amostras pequenas ($n < 30$).
  - Nas amostras grandes ($n \geq 30$) como a distribuição da variável média amostral é assintoticamente normal pelo **Teorema do Limite central (TLC)** podem ser aplicados os Testes Paramétricos.
- Dados contínuos.

Testes Não-Paramétricos:

- **Não fazem pressupostos sobre a distribuição** dos dados:
  - São usados quando a(s) variável(is) não tem(têm) distribuição normal ou quando, apesar da(s) amostra(s) ser(em) grande(s), se opta por conclusões mais conservadoras.
- Dados nominais, ordinais, discretos ou contínuos.
- Em geral, envolvem cálculos mais simples.
- Pouco influenciados por valores extremos.
- A desvantagem destes testes é que não são tão potentes quanto os Testes Paramétricos, ou seja, podem levar a uma maior probabilidade do erro tipo II (definido num slide mais à frente).

Paramétrico

- Distribuição da variável na população conhecida (ex: Normal)
- Estudos anteriores com amostras grandes revelam normalidade
- Amostras grandes
  $n \geq 30$
- Comparo médias e/ou variâncias
- Mais poderoso (*)

Não Paramétrico

- Não conheço a distribuição da variável na população
- Amostras pequenas
- Comparo medianas e/ou distribuições
- Utiliza postos (ranks)
- Menos poderoso (*)

*) Poder: Habilidade do teste de detectar um efeito dado que ele realmente exista

https://slideplayer.com.br/slide/14561961/

Testes de Hipóteses em Estudo...

Testes Paramétricos

- Testes de hipóteses para um valor médio μ
- Testes de hipóteses para uma variância σ^2
- Testes de hipóteses para uma proporção populacional *p*
- Testes de Hipóteses para a igualdade de médias (amostras independentes)
- Testes de Hipóteses para a razão de variâncias
- Testes de Hipóteses para a igualdade de proporções
- Testes de Hipóteses para a igualdade de médias (amostras emparelhadas)

Testes Não Paramétricos

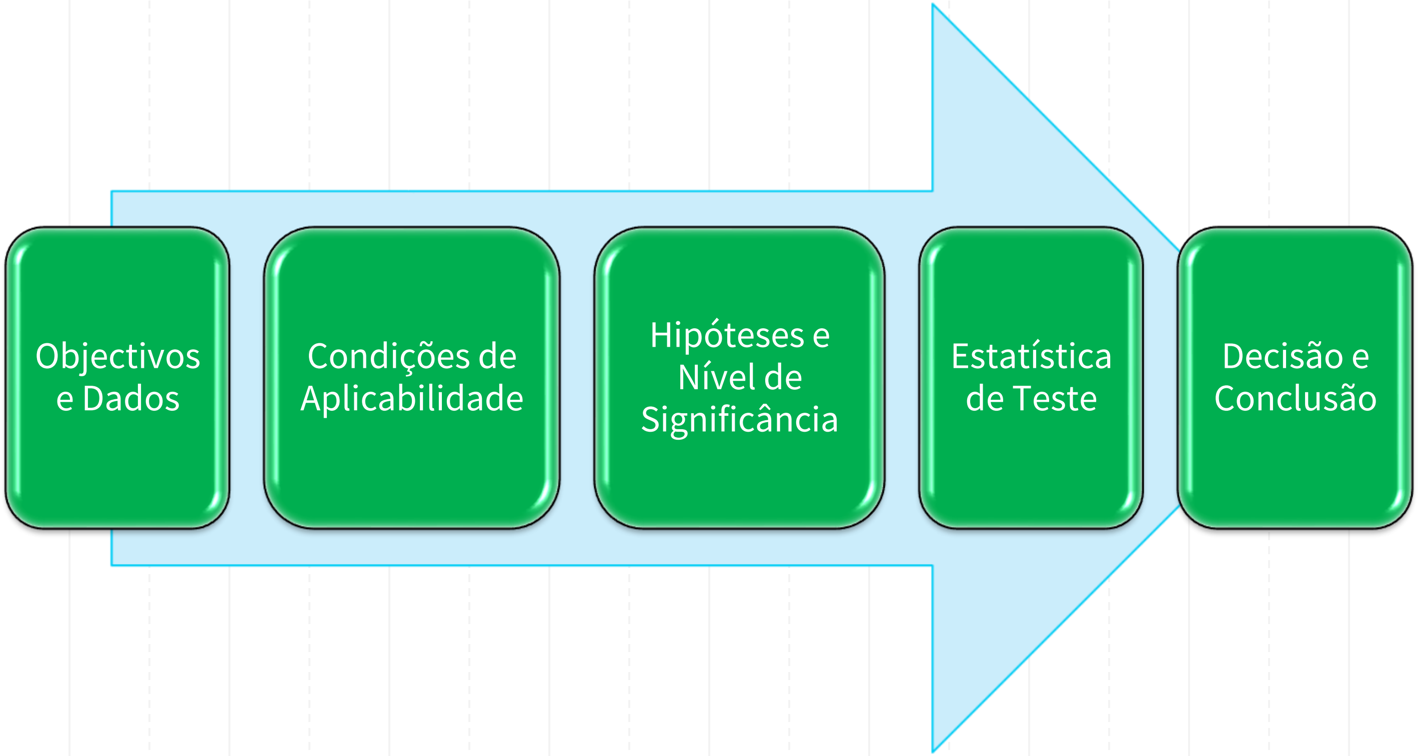
- Teste de Independência do Qui-Quadrado

Condições de Aplicabilidade de Testes Paramétricos

Normalidade

Homogenidade de variâncias

Construção de um Teste de Hipóteses



Tipo de Hipóteses

1) $H_0: \underbrace{\mu = 1{,}70}_{\text{simples}}$ vs. $H_1: \underbrace{\mu = 1{,}80}_{\text{simples}}$

2) $H_0: \underbrace{\mu = 1{,}70}_{\text{simples}}$ vs. $H_1: \underbrace{\mu > 1{,}70}_{\text{composta}}$

3) $H_0: \underbrace{\mu \leq 1{,}70}_{\text{comp.}}$ vs. $H_1: \underbrace{\mu > 1{,}70}_{\text{comp.}}$

4) $H_0: \underbrace{\mu = 1{,}70}_{\text{simples}}$ vs. $H_1: \underbrace{\mu \neq 1{,}70}_{\text{composta}}$

Tipos de Erros vs Nível de Significância

$\alpha = P(\text{erro do tipo I}) =$

$= P(\text{Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira})$

A α chama-se nível de significância.

$\beta = P(\text{erro do tipo II}) =$

$= P(\text{"Aceitar" } H_0 | H_0 \text{ é falsa})$

Tipos de erros

- Erro tipo I (1ª espécie): rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira
- Erro tipo II (2ª espécie): não rejeitar H_0 quando H_0 é falsa

Decisão	H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Não rejeitar H_0	Correto $1-\alpha$	Erro tipo II β
Rejeitar H_0	Erro tipo I α	Correto $1-\beta$

Poder ou potência do teste

Definição: Chama-se potência do teste à probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando a hipótese alternativa é verdadeira ($= 1 - \beta$).

Nível de significância ($0 \leq \alpha \leq 1$)

- Probabilidade que o investigador estabelece à priori como limite para decidir se rejeita H_0
- Níveis usuais de significância: 0,5%, 1% , 5% e 10%

Decisão: Região de Rejeição vs Valor-p

Nota: Supondo que a estatística de teste tem distribuição normal.

Região de rejeição (RR) ou Região crítica (RC): Conjunto para o qual H_0 é rejeitada

- Teste unilateral à esquerda: RR = $]-\infty; z_\alpha]$
- Teste unilateral à direita: RR = $[z_{1-\alpha}; +\infty[$
- Teste bilateral: RR = $]-\infty; -z_{1-\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}; +\infty[$

Regra (considerando os valores críticos):

- $z_0 \le z_\alpha \Rightarrow$ Rejeita-se H_0
- $z_0 \ge z_{1-\alpha} \Rightarrow$ Rejeita-se H_0
- $|z_0| \ge z_{1-\alpha/2} \Rightarrow$ Rejeita-se H_0

Regra: $z_0 \in$ RR $\Rightarrow$ Rejeita-se H_0

Dimensão do teste

Valor-p ou P-value: Probabilidade sob H_0 de a estatística de teste tomar valores tão ou mais desfavoráveis a H_0 do que o seu valor observado

- Teste unilateral à esquerda: valor-p = $P(Z \le z_0)$
- Teste unilateral à direita: valor-p = $P(Z \ge z_0)$
- Teste bilateral: valor-p = $P(Z \le -z_0 \text{ ou } Z \ge z_0) = 2 \times P(Z \ge |z_0|)$

Regra: Valor-p $< \alpha \Rightarrow$ Rejeita-se H_0

O nível de significância α é a probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando ela é verdadeira (conhecido como erro do tipo I).[5] Em testes de hipóteses estatísticas, diz-se que há significância estatística ou que o resultado é estatisticamente significante quando o *p*-valor observado é menor que o nível de significância α definido para o estudo.[2][3] O nível de significância é geralmente determinado pelo pesquisador *antes* da coleta dos dados e é tradicionalmente fixado em 0,05 ou menos, dependendo da área de estudo.[6][7][8] Em muitas áreas de estudo, resultados com nível de significância de 0,05 (probabilidade de erro de 5%) são considerados estatisticamente relevantes.[9][10][11]

O *p*-valor (nível descritivo ou probabilidade de significância) é a probabilidade de se obter uma estatística de teste igual ou mais extrema que a estatística observada a partir de uma amostra aleatória de uma população quando a hipótese nula é verdadeira. Em outras palavras, o *p*-valor é o menor nível de significância para o qual se rejeita a hipótese nula. Por exemplo, a hipótese nula é rejeitada a 5% quando o *p*-valor é menor que 5%.[12]

https://pt.wikipedia.org/wiki/Signific%C3%A2ncia_estat%C3%ADstica

Definição: valor-p é o menor nível de significância a partir do qual H_0 é rejeitada.

Testes de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

Hipóteses, Estatística de Teste e Decisão

2

8.4 Da produção diária de determinado fertilizante tiraram-se seis pequenas porções que se analisaram para calcular a percentagem de nitrogénio. Os resultados foram os seguintes:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
6.2	5.7	5.8	5.8	6.1	5.9

$\bar{x} = 5.917$

Sabe-se, por experiência, que o processo de análise fornece valores com distribuição que se pode considerar normal com $\sigma^2 = 0.25$.

(a) Suportam as observações a garantia de que a percentagem esperada de nitrogénio, μ, é igual a 6% ao nível de significância de 10%?

(b) Responda à alínea anterior usando o valor-p.

Exercício 8.4 (a): Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

Passo 0 [descrição da situação]

X = % de nitrogénio num fertilizante $\sim \mathcal{N}(\mu, 0.25)$
(população normal, de valor esperado desconhecido
e de variância conhecida)
amostra de dimensão 6; $\bar{x} = 5.917$

A não esquecer: $\bar{X}$ não é a mesma coisa que $E[X]$
S^2 " " " " $Var(X)$

$E(X) = \mu$
$Var(X) = \sigma^2$

Slides Professora Claúdia Nunes

Exercício 8.4 (a): Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

Hipóteses:

<u>Passo 1</u> : indicar quais as hipóteses que vamos testar e qual a significância

[nula] $H_0: \mu = 6$ [lê-se: vamos testar a hipótese H_0 i.e, se $\mu = 6$]

[alternativa] $H_1: \mu \neq 6$ [lê-se: em alternativa, vamos decidir se $\mu \neq 6$]

Slides Professora Claúdia Nunes

Tipos de Testes de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

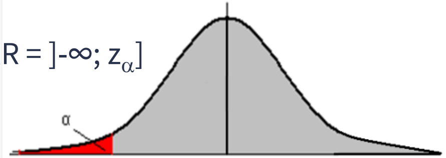
Um **teste de hipóteses paramétrico** para o parâmetro μ (valor médio ou média populacional) pode ser:

Teste

- Bilateral
  - $H_0: \mu = \mu_0$
  - $H_1: \mu \neq \mu_0$
  - $RR =]-\infty; -z_{1-\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}; +\infty[$

- Unilateral
  - à direita
    - $H_0: \mu \leq \mu_0$
    - $H_1: \mu > \mu_0$
    - $RR = [z_{1-\alpha}; +\infty[$

  - à esquerda
    - $H_0: \mu \geq \mu_0$
    - $H_1: \mu < \mu_0$
    - $RR =]-\infty; z_{\alpha}]$



onde μ_0 é o valor numérico específico considerado em H_0 e H_1.

Exercício 8.4 (a): Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

Estatística de Teste:

Passo 2: Escolha da v. fulcral e consequente estatística de teste.

Regras para escolha da v. fulcral no cap. 7:

I.C. p/ μ, σ conhecido, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

I.C. p/ μ, σ desconhecido, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

idem, n grande

$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$ 1	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$	$S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$
$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$ 2		$\sum_{i=1}^{k}\dfrac{(O_i-E_i)^2}{E_i} \overset{a}{\sim} \chi^2_{(k-m-1)}$	

$= \left(\frac{1}{n-1}\sum x_i^2\right) - \left(-\frac{n}{n-1}\bar{x}^2\right)$

I.C. p/ σ, com μ desconhecido $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

IC para μ: Formulário

- **POPULAÇÕES NORMAIS**

Média	$\boxed{\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)}$	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S'/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
Diferença de médias	$\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$ $T = \dfrac{\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}}{\sqrt{\dfrac{(m-1)S_1'^2+(n-1)S_2'^2}{m+n-2}}} \sim t(m+n-2)$	$Z = \dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1'^2}{m}+\dfrac{S_2'^2}{n}}} \overset{a}{\sim} t(\nu)$ onde ν é o maior inteiro contido em r, $r = \dfrac{\left(\dfrac{s_1'^2}{m}+\dfrac{s_2'^2}{n}\right)^2}{\dfrac{1}{m-1}\left(\dfrac{s_1'^2}{m}\right)^2+\dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{s_2'^2}{n}\right)^2}$
Variância	$\dfrac{nS^2}{\sigma^2} = \dfrac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	
Relação de variâncias	$\dfrac{S_1'^2}{S_2'^2}\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(m-1,n-1)$	

Exercício 8.4 (a): Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

Estatística de Teste:

No presente exemplo, estamos a construir um teste de hipóteses para o valor esperado de uma população normal de variância conhecida.

$$V.F = Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$Est. Teste = Z_0 = \frac{\bar{X} - 6}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{H_0}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

(i.e, a estatística de teste é a variável fulcral,

Exercício 8.4 (a): Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

Estatística de Teste:

depois de substituído o parâmetro em teste
pelo valor que consta em H_0)

$H_0: \mu = 6$

valor observado: $z_0 = \dfrac{5.917 - 6}{\sqrt{0.25}/\sqrt{6}} = -0.41 \quad \cancel{\sim N(0,1)}$

n (dimensão da amostra)

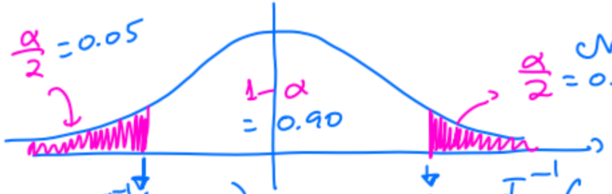
[Passo 2: dist. de X + H_0 + saber quais os parâmetros conhecidos]

Slides Professora Claúdia Nunes

Exercício 8.4 (a): Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

Decisão (pela região de rejeição):

Passo 3 : Construção da Região de Rejeição



$-1.65 = a = \Phi^{-1}(0.05)$ $\qquad$ $b = \Phi^{-1}(0.95) = 1.65$

α = soma das áreas a rosa

[Passo 3 = distribuição da v. fulcral + α + forma da H_1]

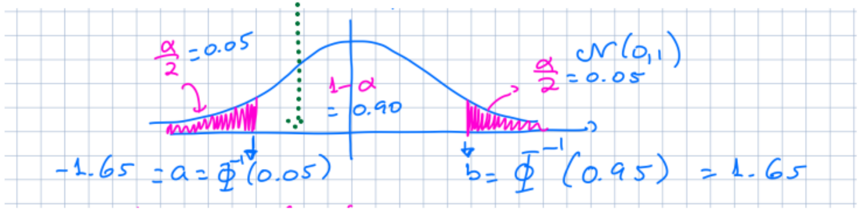
Exercício 8.4 (a): Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

Decisão (pela região de rejeição):

Passo 4: Decisão sobre aceitação ou rejeição de H_0

Região de rejeição RR =]-∞; -1,65] U [1,65; +∞[

z_0 = -0.41



Decisão pela região de rejeição:
Não se rejeita H_0 para α = 10%, pois -1,65 < -0,41 < 1,65. Não existe evidência estatística para afirmar que o valor médio é diferente de 6 para α = 10%.

[Mariana: está bonita a aula de hoje? aguardo resposta!]

então, como $-1.65 < z_0 < 1.65$, significa que para 10% = 5% não há evidências estatísticas para rejeitar H_0

[Passo 4 = Região rejeição + H_0]

a) Sim (-1.645 < -0.408 < 1.645) **b)** Valor-p = 0.6818 > 0.1

Exercício 8.4 (a): Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

		decisão	
		Aceitar H_0	Rejeitar H_0
Realidade	H_0 V	O.K.	ERRO Tipo 1
	H_0 F	ERRO Tipo 2	O.K.

$\alpha = P(\text{erro tipo 1}) = P(\text{Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira})$
(nível de significância)

(por diversas razões, damos mais relevância ao erro tipo 1)

No exemplo: $\alpha = 0.10$

[Passo 1 = H_0 + H_1 + α]

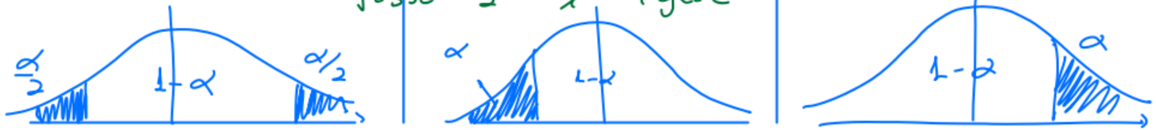
Exercício 8.4 (a): Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

Comentário: $\boxed{\text{A forma da } H_1 \text{ é essencial no passo 3}}$

$H_0: \mu = 6$	$H_0: \mu = 6$	$H_0: \mu = 6$
$H_1: \mu \neq 6$	$H_1: \mu < 6$	$H_1: \mu > 6$

Passo 0 é ± igual

Passo 2 é igual



$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

α é a área da zona de rejeição!

Exercício 8.4 (a): Teste t para o Valor Médio (σ^2 Conhecida)

Nota: A variável média amostral tem distribuição normal, logo este teste de hipóteses é válido.

Teste Bilateral

Hipóteses

H_0: $\mu = 6$ *versus* H_1: $\mu \neq 6$

Dados:

N = 6

Média amostral = 5,917

$\sigma^2 = 0,25$

$\mu_0 = 6$

$\alpha = 0,10$

$z_{1-\alpha/2} = z_{0,95} = 1,645$

Estatística de Teste

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Valor Observado da Estatística de Teste (VOE)

$z_0 = -0,41$

Regra: $z_0 \in RR \Rightarrow$ Rejeita-se H_0

Decisão

Pela região de rejeição: $z_0 = -0,41$ não pertence à região de rejeição RR =]-∞; -1,645] U [1,645; +∞[

Pelo valor-p: Valor-p = 0,6818 > 0,10 (ver slide a seguir)

Regra: Valor-p < $\alpha \Rightarrow$ Rejeita-se H_0

Não se rejeita-se H_0 para α = 10%. Não existe evidência estatística para afirmar que a percentagem esperada de nitrogénio é diferente de 6% para α = 10%.

$RR =]-\infty; -z_{1-\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}; +\infty[$

?

Cálculo do Quantil da Distribuição Normal de Probabilidade 1-α/2

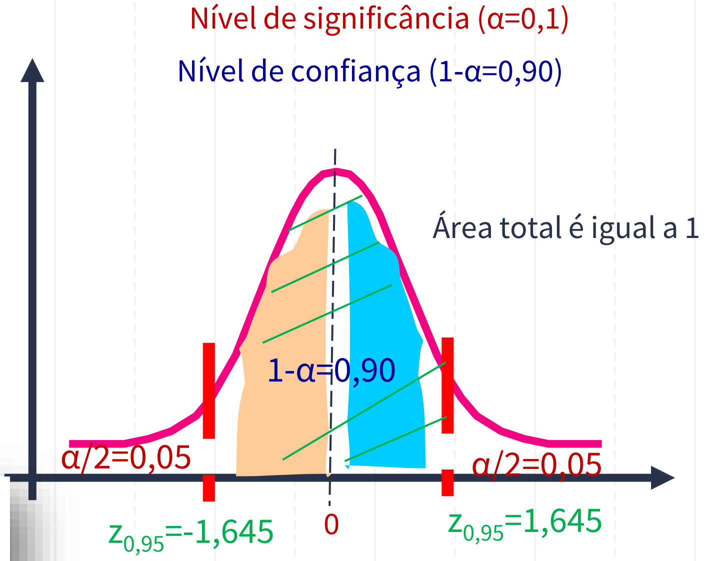


TABELA 5 – DISTRIBUIÇÃO NORMAL: $\Phi^{-1}(z)$

ε	.0005	.0010	.0050	.0100	.0200	.0250	.0500	.1000	.2000	.3000	.4000
z_ε	3.290	3.090	2.576	2.326	2.054	1.960	1.645	1.282	.842	.524	.253
$z_{\varepsilon/2}$	3.481	3.290	2.807	2.576	2.326	2.241	1.960	1.645	1.282	1.036	.842

$z_\varepsilon : P(Z > z_\varepsilon) = \varepsilon; \quad z_{\varepsilon/2} : P(|Z| > z_{\varepsilon/2}) = \varepsilon.$

O nível de significância é igual a $\alpha = 0,10$, então tem-se $z_{1-\alpha/2} = z_{0,95} = 1,645$

Teste bilateral: valor-p = $P(Z \leq -z_0 \text{ ou } Z \geq z_0) = P(Z \leq -z_0) + P(Z \geq z_0) = 2 \times P(Z \geq |z_0|)$

Exercício 8.4 (b): Valor-p quando a Estatística de Teste tem Distribuição Normal Padrão

Decisão (pelo p-value):

valor-p = $P(Z \leq -0{,}41 \text{ ou } Z \geq 0{,}41)$
= $2 \times P(Z \geq 0{,}41) = 2 \times [1 - P(Z < 0{,}41)]$

A tabela geral só permite obter probabilidades de quantis positivos e do tipo $P(Z \leq z)$.

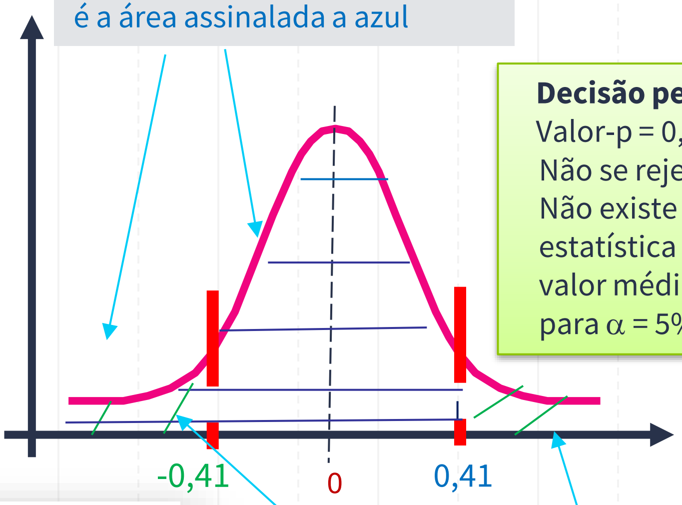
Então, tem-se
$P(Z \leq 0{,}41) = 0{,}6591$, logo

valor-p = $2 \times [1 - P(Z \leq 0{,}41)] \sim 2 \times [1 - 0{,}6591] = 0{,}6818$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879

Área total é igual a 1

$P(Z \leq 0{,}41) = 0{,}6591$
é a área assinalada a azul



Decisão pelo valor-p:
Valor-p = 0,6818 > 0,10
Não se rejeita H_0 para α = 10%.
Não existe evidência estatística para afirmar que o valor médio é diferente de 6 para α = 5%.

$P(Z \leq -0{,}41) = 1 - P(Z \leq 0{,}41) = P(Z \geq 0{,}41) = 0{,}3409$
é a área assinalada a verde

a) Sim (-1.645 < -0.408 < 1.645) **b)** Valor-p = 0.6818 > 0.1

Murteira et al (2015)
Capítulo 8

1. Para cada uma das proposições seguintes refira se se trata ou não de uma hipótese estatística:
   a) $\mu = 3$;
   b) $\bar{x} = 4$;
   c) $P(X < 2.5) = 0.4$;
   d) $2 < \sigma < 3$;
   e) $\bar{X} < 3$.

Exercício 1

Considere-se uma população com função de distribuição F. Uma hipótese estatística é uma conjetura sobre aspetos desconhecidos de F.

Para cada uma das proposições seguintes refira se se trata ou não de uma hipótese estatística:

a) $\mu = 3$; Sim

b) $\bar{x} = 4$; Não

c) $P(X < 2.5) = 0.4$; Sim

d) $2 < \sigma < 3$; Sim

e) $\bar{X} < 3$. Nao

- μ e σ são parâmetros de $F_X(x \mid \mu, \sigma)$
- $P(X < 2.5) = F_X(2.5)$

Murteira et al (2015)
Capítulo 8

14. Um comerciante recebe ovos de um determinado aviário, onde os ovos são classificados, consoante o peso, em duas classes, *A* e *B*. O peso dos ovos da classe *A* tem distribuição normal de média 50 gramas e desvio padrão 6 gramas, enquanto o peso dos ovos da classe *B* tem distribuição normal de média 55 gramas e desvio padrão idêntico ao da classe *A*. O comerciante acaba de receber uma remessa de ovos com garantia de serem da classe *B* e tem um prazo de 2 dias para reclamar, caso considere ter havido engano da parte do aviário. Considere $H_0 : \mu = 55$ contra $H_1 : \mu = 50$.

a) Tal como o teste foi definido, pode afirmar-se que o aviário tem o benefício da dúvida?

b) Para tomar uma decisão, o comerciante analisou uma amostra de uma dúzia de ovos cujo peso total foi de 630 gramas. Qual a atitude que o comerciante deve tomar? (utilize a dimensão de 0.05 como referência, e de 0.10 para comparação).

c) Determine a probabilidade do erro de 2.ª espécie. Qual o seu significado?

d) Se pretender que a probabilidade do erro de 2.ª espécie seja idêntica à do de 1.ª espécie (0.05), qual deve ser a dimensão da amostra a considerar?

Nota: Nesta questão, pretende-se determinar o p-value.

Exercício 14 a)

Ex 14

terça-feira, 15 de fevereiro de 2022 00:09

$X \equiv$ Peso de um ovo (em gramas) $\sim N(\mu, 6^2)$

$H_0: \mu = 55$ vs $H_1: \mu = 50$

a) Sim. De acordo com a hipótese nula, que é aquela em que se acredita até prova (recolha de evidência estatística) em contrário, o peso dos ovos tem uma média de 55 gramas, que é o peso indicado pelo aviário para os ovos de classe B.

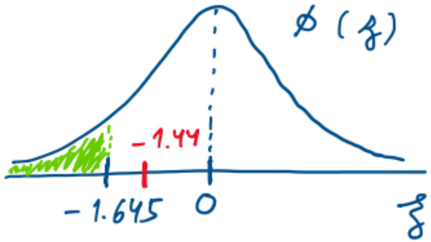
Exercício 14 b)

b) Amostra de $n = 12$ ovos

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = 630 \qquad \bar{x} = \frac{630}{12} = 52.5$$

População normal (média):

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$



Estatística do teste (sob H_0 verdadeira):

$$Z = \frac{\bar{X} - 55}{6/\sqrt{12}} \sim N(0,1)$$

Exercício 14 b)

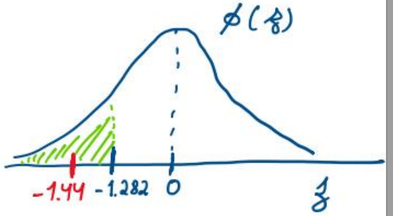
$$W_{0.05} = \{ z_{obs} : z_{obs} < -z_{0.05} = -1.645 \}$$

$$z_{obs} = \frac{\bar{x} - 55}{6/\sqrt{12}} = \frac{52.5 - 55}{6/\sqrt{12}} = -1.44 \quad W_{0.05} \text{ logo não se rejeita } H_0.$$

Ao basear-se num teste estatístico de dimensão 0.05, o comerciante deve confiar na garantia do aviário, e não reclamar, uma vez que a evidência estatística presente na amostra recolhida confere suporte à a hipótese nula, de acordo com a qual o peso médio dos ovos é condicente com a classe B.

$$W_{0.1} = \{ z_{obs} : z_{obs} < -z_{0.1} = -1.282 \}$$

$$z_{obs} = -1.44 \in W_{0.1} \text{ logo rejeita-se } H_0.$$



Com uma dimensão de teste de 0.1 a conclusão seria contrária.

Exercício 14 c)

c) Com $\alpha = 0.05$ (a dimensão de referência) temos:

$$1-\beta = P(\text{não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}) =$$

E.T. sob H_0 verdadeira

$$= P(Z > -1.645 \mid \mu = 50) =$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-55}{6/\sqrt{12}} > -1.645 \mid \mu = 50\right) =$$

$$= P\left(\bar{X} > 55 - 1.645 \times \frac{6}{\sqrt{12}} \mid \mu = 50\right) =$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{55 - 1.645 \times \frac{6}{\sqrt{12}} - 50}{6/\sqrt{12}}\right) =$$

$Z \sim N(0,1)$

$$= 1 - \Phi(1.241751) \simeq 1 - \Phi(1.24) = 1 - 0.8925 =$$

Tabela 4

$$= 0.1075$$

Exercício 14 c)

Esta é a probabilidade de, baseado no teste proposto, se concluir erradamente com base numa amostra recolhida que os ovos pertencem à classe B, ou seja, a probabilidade de não se rejeitar H_0 quando esta é falsa.

Com $\alpha = 0.1$ teriamos:

E.T. sob H_0 verdadeira

$$1-\beta = P(Z > -1.282 \mid \mu = 50) =$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-55}{6/\sqrt{12}} > -1.282 \mid \mu = 50\right) =$$

$$= P\left(\bar{X} > 55 - 1.282 \times \frac{6}{\sqrt{12}} \mid \mu = 50\right) =$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{55 - 1.282 \times \frac{6}{\sqrt{12}} - 50}{6/\sqrt{12}}\right) =$$

$\hookrightarrow Z \sim N(0,1)$

$$= 1 - \Phi(1.6) \simeq 1 - \Phi(1.6) = 1 - 0.9452 = 0.0548$$

Exercício 14 d)

Prob. erro tipo 2

Prob. erro tipo 1

$Z \sim N(0,1)$

d) $\underbrace{1-\beta}_{\text{Prob. erro tipo 2}} = \underbrace{\alpha}_{\text{Prob. erro tipo 1}} = 0.05$

E.T. sob H_0 verdadeira

$$1-\beta = 0.05 = P(Z > -1.645 \mid \mu = 50) =$$

valor crítico para $\alpha = 0.05$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-55}{6/\sqrt{n}} > -1.645 \;\middle|\; \mu = 50\right) =$$

$$= P\left(\bar{X} > 55 - 1.645 \times \frac{6}{\sqrt{n}} \;\middle|\; \mu = 50\right) =$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{6/\sqrt{n}} > \frac{55 - \frac{9.87}{\sqrt{n}} - 50}{6/\sqrt{n}}\right) =$$

$$= P\left(Z > \frac{\left(5 - \frac{9.87}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n}}{6}\right) =$$

$$= P\left(Z > \frac{5}{6}\sqrt{n} - \frac{9.87}{6}\right) =$$

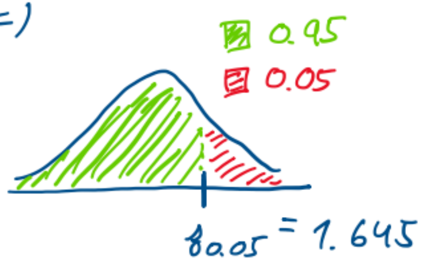
Exercício 14 d)

$$= P\left(Z > \frac{5}{6}\sqrt{n} - 1.645\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{5}{6}\sqrt{n} - 1.645\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0.05 - 1 = -\Phi\left(\frac{5}{6}\sqrt{n} - 1.645\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0.95 = \Phi\left(\underbrace{\frac{5}{6}\sqrt{n} - 1.645}_{z_{0.05}}\right)$$



$$\frac{5}{6}\sqrt{n} - 1.645 = 1.645 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \left(\frac{6}{5} \times 2 \times 1.645\right)^2 = 15.5867 \simeq 16$$

Murteira et al (2015)
Capítulo 8

16. Seja X uma variável aleatória que representa a quantidade de vinho existente numa garrafa de 75 centilitros. Admita que X tem distribuição normal com desvio padrão igual a 2. Para testar $H_0 : \mu = 75$ contra $H_1 : \mu < 75$ seleccionou-se uma amostra casual de 10 garrafas, rejeitando-se a hipótese nula se $\bar{x} < 74.1$, onde $\bar{x}$ é a quantidade média de vinho, por garrafa, na amostra observada.

a) Calcule a dimensão deste teste.

b) Determine a função potência, e calcule o seu valor quando $\mu = 74$ e $\mu = 72.5$.

Nota: Nesta questão, pretende-se determinar o p-value.

Exercício 16 a)

$X \equiv$ Vinho numa garrafa de 75 cl (em cl)

$X \sim N(\mu, 2^2)$ $\qquad n = 10$ garrafas (amostra casual)

$W_{\bar{X}} = \{ \bar{x} : \bar{x} < 74.1 \}$

$H_0: \mu = 75 \quad vs \quad H_1: \mu < 75$

a) $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}) =$

$= P(\bar{X} < 74.1 \mid \mu = 75) =$

$= P\left(\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \dfrac{74.1 - 75}{2/\sqrt{10}} \right) \simeq P(Z < -1.42) =$

$= \Phi(-1.42) = 1 - \Phi(1.42) = 1 - 0.9222 = 0.0778$

Nota: para obter o valor igual às soluções basta calcular o valor crítico de forma "exata", ou seja, recorrendo a software em vez de tabelas, e arredondar só no último passo.

Exercício 16 b)

b)

$$\beta(\mu) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}) =$$

$$= P(\bar{X} < 74.1 \mid \mu) = P\left(Z < \frac{74.1-\mu}{2/\sqrt{10}} \,\middle|\, \mu\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{74.1-\mu}{2/\sqrt{10}}\right)$$

$$\mu = 74 \Rightarrow \beta(\mu) = \Phi\left(\frac{74.1-74}{2/\sqrt{10}}\right) \simeq \Phi(0.16) = 0.5636$$

$$\mu = 72.5 \Rightarrow \beta(\mu) = \Phi\left(\frac{74.1-72.5}{2/\sqrt{10}}\right) \simeq \Phi(2.53) = 0.9943$$

Nota: para obter o valor igual às soluções basta calcular o valor crítico de forma "exata", ou seja, recorrendo a software em vez de tabelas, e arredondar só no último passo.

Testes de Hipóteses para μ (σ^2 Desconhecida)

Hipóteses Compostas, Estatística de Teste e Decisão

3

8.6 Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor esperado μ e desvio padrão σ. A partir de uma amostra de dimensão 30 dessa variável obtiveram-se os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 64.0 \qquad \sum_{i=1}^{30} (x_i - \overline{x})^2 = 84.8$$

Teste ao nível de significância de 5% a hipótese $H_0 : \mu = 2.0$ contra a hipótese alternativa $H_1 : \mu > 2.0$.

Exercício 8.6: Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Desconhecida)

Hipóteses:

Passo 0.1 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\mu, \sigma^2 = ?$

$H_0: \mu = 2.0$

$H_1: \mu > 2.0$

$\alpha = 5\%$

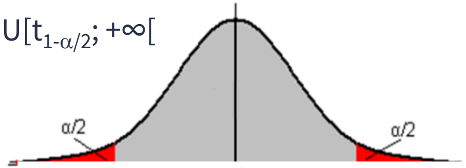
Slides Professora Claúdia Nunes

Tipos de Testes de Hipóteses para μ (σ^2 Desconhecida)

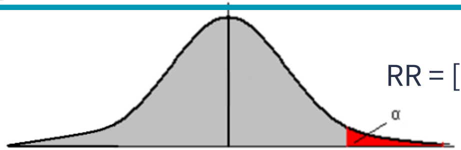
Um **teste de hipóteses paramétrico** para o parâmetro μ (valor médio ou média populacional) pode ser:

Teste

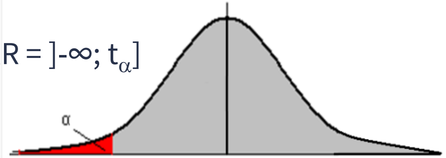
- Bilateral
  - $H_0: \mu = \mu_0$
  - $H_1: \mu \neq \mu_0$
  - RR = $]-\infty; -t_{1-\alpha/2}] \cup [t_{1-\alpha/2}; +\infty[$



- Unilateral
  - à direita
    - $H_0: \mu \leq \mu_0$
    - $H_1: \mu > \mu_0$
    - RR = $[t_{1-\alpha}; +\infty[$



  - à esquerda
    - $H_0: \mu \geq \mu_0$
    - $H_1: \mu < \mu_0$
    - RR = $]-\infty; t_{\alpha}]$



onde μ_0 é o valor numérico específico considerado em H_0 e H_1.

Exercício 8.6: Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Desconhecida)

Estatística de Teste:

Passo 2: v. fldcl e est. Teste

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(29)}$$

$$T_0 = \frac{\bar{X} - 2}{S/\sqrt{30}} \overset{H_0}{\sim} t_{(29)}$$

$$t_0 = \frac{2.13 - 2}{\sqrt{2.92/30}} = 0.417$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 64.0 \qquad \sum_{i=1}^{30} (x_i - \bar{x})^2 = 84.8$$

$$\bar{x} = \frac{64}{30} = 2.13$$

$$s^2 = \frac{84.8}{29} = 2.92$$

IC para μ: Formulário

Variância corrigida

$S'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

- **POPULAÇÕES NORMAIS**

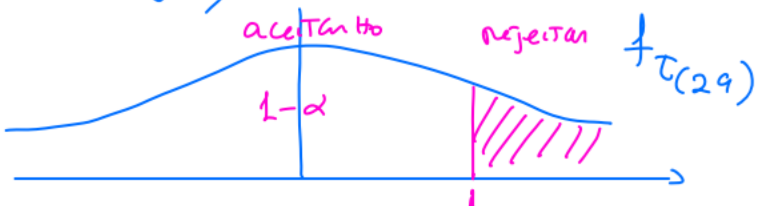
Média	$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\boxed{\frac{\bar{X}-\mu}{S'/\sqrt{n}} \sim t(n-1)}$
Diferença de médias	$\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$	$Z=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1'^2}{m}+\frac{S_2'^2}{n}}} \overset{a}{\sim} t(\nu)$ onde ν é o maior inteiro contido em *r*, $r=\frac{\left(\frac{s_1'^2}{m}+\frac{s_2'^2}{n}\right)^2}{\frac{1}{m-1}\left(\frac{s_1'^2}{m}\right)^2+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s_2'^2}{n}\right)^2}$
	$T=\frac{\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}}{\sqrt{\frac{(m-1)S_1'^2+(n-1)S_2'^2}{m+n-2}}} \sim t(m+n-2)$	
Variância	$\frac{nS^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	
Relação de variâncias	$\frac{S_1'^2}{S_2'^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(m-1,n-1)$	

Exercício 8.6: Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Desconhecida)

Decisão (pela região de rejeição):

Região de rejeição RR = [1,699; +∞[

Passo 3: R. rejeição



$a = F^{-1}_{t(29)}(0.95) = 1.699$

Passo 4: Decisão $t_0 = 0.417 < 1.699$, então não há evidências para rejeitar H0 para $\alpha = 5\%$.

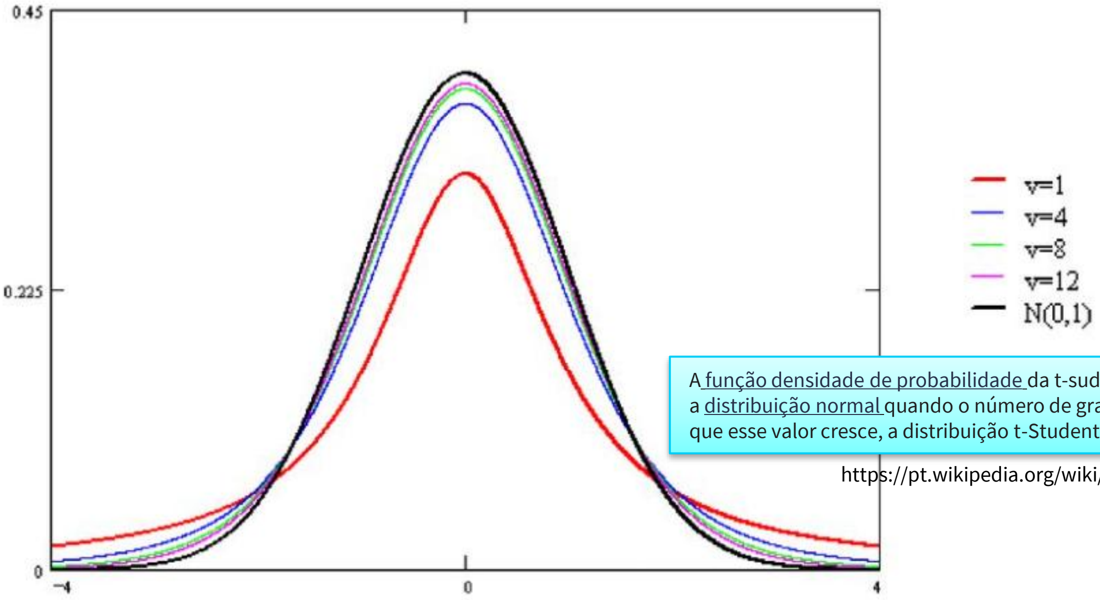
Decisão pela região de rejeição:
Não se rejeita H_0 para α = 5%, pois 0,417 < 1,699.
Não existe evidência estatística para afirmar que o valor médio é superior a 2 para α = 5%.

Não se rejeita H_0 (0.427 < 1.699)

Curiosidade

T-Student

- Se a **variável tem distribuição Normal na população**, ou a amostra é suficientemente grande, mas não conhecemos o desvio da população, só da amostra, então ...
- ... A média amostral se distribui conforme uma **t-Student**
- **...** A distribuição t-Student depende dos graus de liberdade (n-1), que denotamos por v



A função densidade de probabilidade da t-sudent detém caudas mais pesadas que a distribuição normal quando o número de graus de liberdade é pequeno e à medida que esse valor cresce, a distribuição t-Student aproxima-se da normal.

https://pt.wikipedia.org/wiki/Distribui%C3%A7%C3%A3o_t_de_Student

https://slideplayer.com.br/slide/14561961

Decisão: Região de Rejeição vs Valor-p

Nota: Supondo que a estatística de teste tem distribuição t-student.

Região de rejeição (RR) ou Região crítica (RC): Conjunto para o qual H_0 é rejeitada

- Teste unilateral à esquerda: $RR =]-\infty; t_{\alpha}]$
- Teste unilateral à direita: $RR = [t_{1-\alpha}; +\infty[$
- Teste bilateral: $RR =]-\infty; -t_{1-\alpha/2}] \cup [t_{1-\alpha/2}; +\infty[$

$\Leftrightarrow$

Regra (considerando os valores críticos):

- $t_0 \leq t_{\alpha} \Rightarrow$ Rejeita-se H_0
- $t_0 \geq t_{1-\alpha} \Rightarrow$ Rejeita-se H_0
- $|t_0| \geq t_{1-\alpha/2} \Rightarrow$ Rejeita-se H_0

Regra: $t_0 \in RR \Rightarrow$ Rejeita-se H_0

Valor-p ou P-value: Probabilidade sob H_0 de a estatística de teste tomar valores tão ou mais desfavoráveis a H_0 do que o seu valor observado

- Teste unilateral à esquerda: valor-p $= P(T \leq t_0)$
- Teste unilateral à direita: valor-p $= P(T \geq t_0)$
- Teste bilateral: valor-p $= P(T \leq -t_0 \text{ ou } T \geq t_0) = 2 \times P(T \geq |t_0|)$

Regra: Valor-p $< \alpha \Rightarrow$ Rejeita-se H_0

?

$RR = [t_{1-\alpha}; +\infty[$

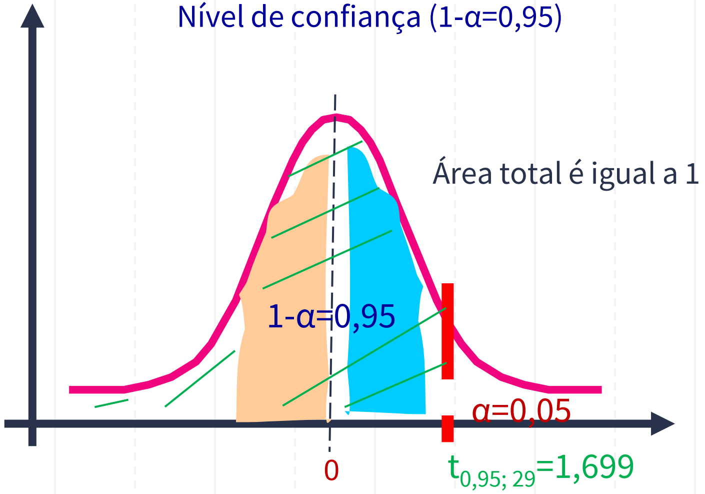
Cálculo do Quantil da Distribuição t-student de Probabilidade 1-α/2 e com n-1 g.l.´s

$$t_{n,\varepsilon} : P(X > t_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

n \ ε	.400	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.325	1,000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.328
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	.258	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	.257	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	.257	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	.257	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	.257	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	.257	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	.256	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	.256	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	.256	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	.256	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	.256	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	.256	.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	.256	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	.256	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	.256	.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385

Nível de significância (α=0,05)

Nível de confiança (1-α=0,95)



O nível de significância é igual a $\alpha = 0,05$ e n-1 = 29 g.l.´s, então tem-se $t_{1-\alpha;n-1} = t_{0,95;\,29} = 1,699$

Teste unilateral à direita: valor-p = $P(T \geq t_0)$

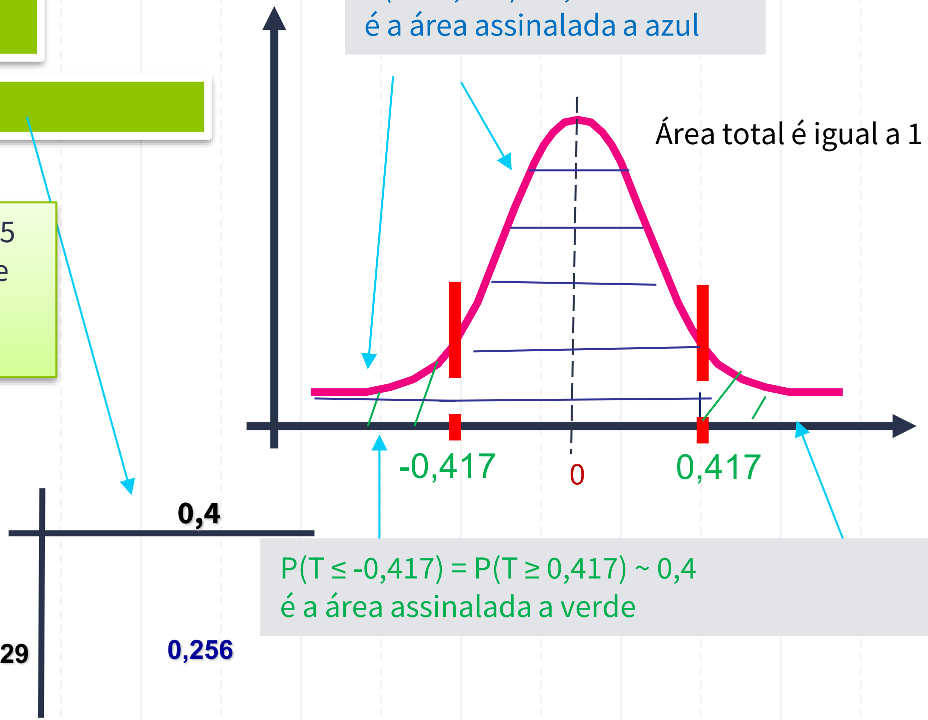
Cálculo do valor-p quando a Estatística de Teste tem Distribuição t-student com n-1 g.l.´s

Decisão (pelo valor-p):

valor-p = $P(T \geq 0{,}417) \sim P(T \geq 0{,}256) = 0{,}4$

Decisão pelo valor-p: Valor-p = 0,4 > 0,05
Não se rejeita H_0 para α = 5%. Não existe evidência estatística para afirmar que o valor médio é superior a 2 para α = 5%.

$P(T \leq 0{,}417) \sim 0{,}7$
é a área assinalada a azul



$P(T \leq -0{,}417) = P(T \geq 0{,}417) \sim 0{,}4$
é a área assinalada a verde

Murteira et al (2015)
Capítulo 8

24. Determinado produtor de vinho garante às autoridades de fiscalização que o seu vinho tem um teor médio de acidez que não ultrapassa 0.5 g/l. Supõe-se que o teor de acidez é uma variável aleatória com distribuição normal de parâmetros desconhecidos.

a) Com base numa amostra de dimensão n, formalize um teste estatístico que permita analisar a veracidade da afirmação do produtor.

b) Observada uma amostra de 20 garrafas, obteve-se uma média de 0.7 g/l e um desvio padrão corrigido de 0.08. Deverão as autoridades de fiscalização actuar sobre o produtor? Justifique a resposta por meio de um teste adequado.

Exercício 24 a)

$X \equiv$ teor de acidez do vinho (em g/l)

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

a) Amostra: $(X_1, \ldots, X_n)$

Testar $H_0: \mu \leq 0.5$ contra $H_1: \mu > 0.5$ é equivalente a testar:

$H_0: \mu = 0.5$ vs $H_1: \mu > 0.5$

Dimensão do teste: $\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira})$

Variável fulcral (População normal c/ σ^2 desconhecido):

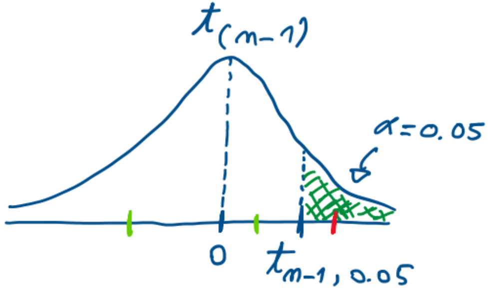
$$\frac{\bar{X} - \mu}{S'/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$t_{(n-1)}$

Exercício 24 a)

Variável fulcral (População normal c/ σ^2 desconhecido):

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S' / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$



Estatística-teste (sob H_0):

$$T = \frac{\bar{X} - 0.5}{S' / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$t_{obs} = \frac{\bar{x} - 0.5}{s' / \sqrt{n}}$$

Região crítica: $W_T = \{ t_{obs} : t_{obs} > t_{n-1, \alpha} \}$

- rejeita-se H_0 se $t_{obs} \in W_T$.
- não se rejeita H_0 se $t_{obs} \notin W_T$.

Exercício 24 a)

Nota:

$$t_{obs} > t_{n-1,\alpha} \iff \frac{\overline{x} - \mu_0}{s'/\sqrt{n}} > t_{n-1,\alpha} \iff$$

$$\iff \overline{x} > \mu_0 + t_{n-1,\alpha} \cdot \frac{s'}{\sqrt{n}}$$

Assim sendo, outra possível região crítica é:

$$W_{\overline{X}} = \left\{ \overline{x} : \overline{x} > \mu_0 + t_{n-1,\alpha} \frac{s'}{\sqrt{n}} \right\} =$$

$$= \left\{ \overline{x} : \overline{x} > 0.5 + t_{n-1,\alpha} \frac{s'}{\sqrt{n}} \right\}$$

- rejeita-se H_0 se $\overline{x} \in W_{\overline{X}}$.
- não se rejeita H_0 se $\overline{x} \notin W_{\overline{X}}$.

Exercício 24 b)

b) $n = 20$ $\quad \bar{x} = 0.7$

$\alpha = 0.05$ $\quad s' = 0.08$ $\quad t_{19,\,0.05} = 1.729$

$$W_T = \{ t : t > t_{19,\,0.05} \} = \{ t : t > 1.729 \}$$

$$t_{obs} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s' / \sqrt{n}} = \frac{0.7 - 0.5}{0.08/\sqrt{20}} = 11.18$$

$t_{obs} \in W_T \rightarrow$ Rejeita-se H_0.

Conclusão: As autoridades devem fiscalizar o produtor.

Exercício 24 b)

Resolução alternativa:

$$W_{\bar{X}} = \left\{ \bar{x} : \bar{x} > 0.5 + t_{19,\,0.05} \frac{0.08}{\sqrt{20}} \right\} =$$

$$= \left\{ \bar{x} : \bar{x} > 0.5309 \right\}$$

$\bar{x} = 0.7 \in W_{\bar{X}} \rightarrow$ Rejeita-se H_0.

Testes de Hipóteses para μ: Resumo...

Hipóteses, Estatística de Teste e Decisão

4

Passos Fundamentais para a Construção de um Teste de Hipóteses

Método Geral

$\boxed{\text{Passo 0}}$

$$X \begin{cases} \rightarrow N(\mu, \sigma^2) \begin{cases} \mu \text{ desconhecido, } \sigma^2 \text{ conhecido} & (1) \\ \mu \text{ e } \sigma^2 \text{ desconh.} & (2) \end{cases} \\ \rightarrow \text{Bernoulli}(p) \end{cases}$$

$\boxed{\text{Passo 1}}$

Indicar H_0 e H_1 e nível de significância α

θ = parâmetro a testar (μ, σ ou p, consoante o caso)

(a) $\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta \neq \theta_0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta < \theta_0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta > \theta_0 \end{cases}$

Passos Fundamentais para a Construção de um Teste de Hipóteses

Passo 2

Com a informação do passo 0, vamos indicar a v. fulcral / estatística de teste

(mesmos critérios que demos p/ os intervalos de confiança)

1 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	2, p/ μ $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$	$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$	$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$
2, p/ σ^2 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$		$\sum_{i=1}^{k}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i} \overset{a}{\sim} \chi^2_{(k-m-1)}$	

Passos Fundamentais para a Construção de um Teste de Hipóteses

$\boxed{\text{Passo 3}}$ Com o nível de significância α e a forma da região de rejeição ((a), (b) ou (c)), vamos construir a região de rejeição, usando a distribuição da v. aleatória

(a) → Zona de rejeição bilateral
(b) → Zona de rejeição unilateral, à esquerda
(c) → Zona de rejeição unilateral, à direita

De qq forma α = área da zona de rejeição

Passos Fundamentais para a Construção de um Teste de Hipóteses

$\boxed{\text{Passo 4}}$ Verificar se o valor observado da estatística de teste está ou não na região de rejeição.

Construção de um Teste de Hipóteses: Exemplo 1

① $X \sim \mathcal{N}(\mu, 2^2)$

passo 0 | $n = 4$; $\alpha = 5\%$; $\bar{x} = 6$

Hipóteses:

passo 1 | $H_0: \mu = 5$
$H_1: \mu \neq 5$

Estatística de Teste:

v. fulcral $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ (padronização)

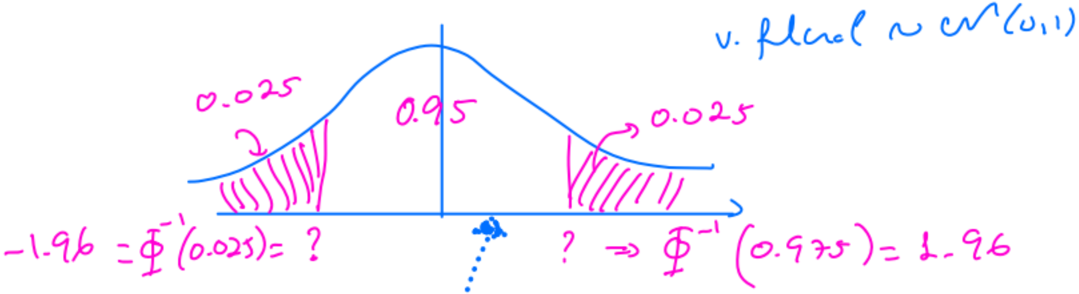
passo 2 | Est. Teste $Z_0 = \dfrac{\bar{X} - 5}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{H_0}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$

valor obs. est teste: $z_0 = \dfrac{6-5}{1} = 1$

[valor obs estatística de teste é um nº e por isso não tem distribuição]

Construção de um Teste de Hipóteses: Exemplo 1

Decisão (pela região de rejeição):



Passo 3

$z_0 = 1$

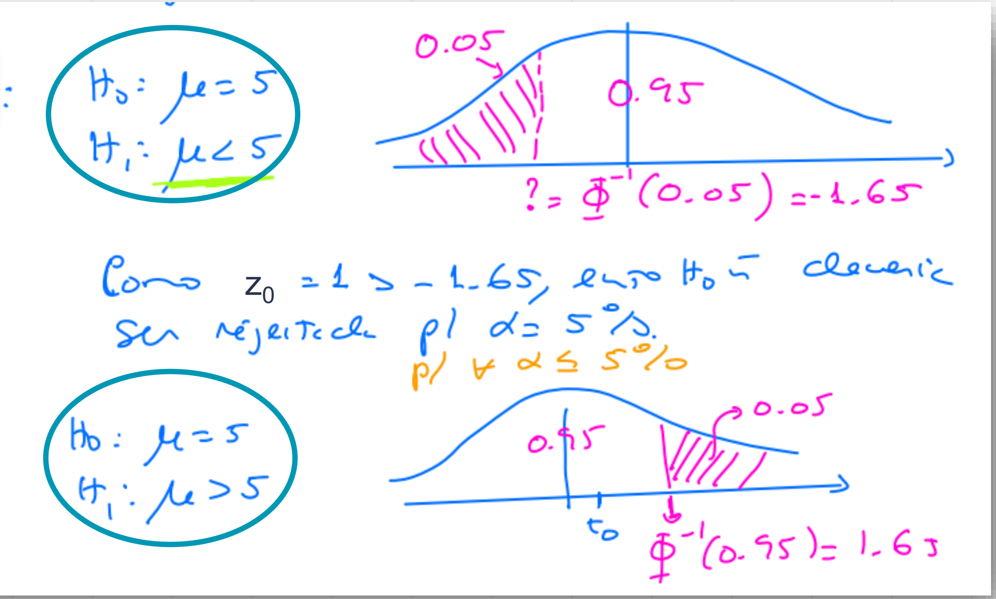
Como $|z_0| < 1.96$, ie, t_0 não pertence à região de rejeição, então p/ $\alpha = 5\%$, H0 não deve ser rejeitada.

Decisão:
Não se rejeita H0 para $\alpha = 5\%$, pois $|1| < 1{,}96$. Não existe evidência estatística para afirmar que o valor médio é diferente de 5 para $\alpha = 5\%$.

Construção de um Teste de Hipóteses: Exemplos 2 e 3

Hipóteses:

Hipóteses:



Testes de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Conhecidas)

5

Hipóteses, Estatística de Teste e Decisão (Amostras Independentes)

Teste para a Diferença de Valores Médios (2 Amostras Independentes)

O **teste para 2 amostras independentes** também é conhecido como teste *t* não-emparelhado

- Permite a **comparação de dois valores médios** usando amostras representativas de duas populações independentes.
- Os indivíduos são escolhidos **aleatoriamente** da população.
- As duas amostras são **independentes**.
- Deve-se saber se as **variâncias** são aproximadamente **iguais** (homocedasticidade) ou **não** (heterocedasticidade).
- **Suposição deste teste é**: A variável de interesse deve ter distribuição **Normal** em cada uma das populações (das quais as amostras foram recolhidas).

Nota: Geralmente, as variâncias são desconhecidas, mas também existem testes de hipóteses para o caso das variâncias serem conhecidas.

IC para μ_1-μ_2: Formulário

Variância corrigida

$$S'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

- **POPULAÇÕES NORMAIS**

Média	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S'/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
Diferença de médias	Variâncias Conhecidas: $\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$	Variâncias Desconhecidas e Diferentes: $Z=\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1'^2}{m}+\dfrac{S_2'^2}{n}}} \overset{a}{\sim} t(\nu)$ onde ν é o maior inteiro contido em r, $r=\dfrac{\left(\dfrac{s_1'^2}{m}+\dfrac{s_2'^2}{n}\right)^2}{\dfrac{1}{m-1}\left(\dfrac{s_1'^2}{m}\right)^2+\dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{s_2'^2}{n}\right)^2}$
	Variâncias Desconhecidas e Iguais: $T=\dfrac{\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}}{\sqrt{\dfrac{(m-1)S_1'^2+(n-1)S_2'^2}{m+n-2}}} \sim t(m+n-2)$	
Variância	$\dfrac{nS^2}{\sigma^2}=\dfrac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	
Relação de variâncias	$\dfrac{S_1'^2}{S_2'^2}\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(m-1,n-1)$	

IC para μ_1-μ_2: Formulário

- **GRANDES AMOSTRAS**

Caso geral

Média	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S'/\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$
Diferença de médias	$\dfrac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$	$\dfrac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1'^2}{m}+\dfrac{S_2'^2}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$

Variâncias Conhecidas

Variâncias Desconhecidas

Estatísticas de Teste t para a Diferença de Valores Médios (2 Amostras Independentes)

- **Variâncias iguais e desconhecidas:**

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{(n_1+n_2-2)}$$

$$s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

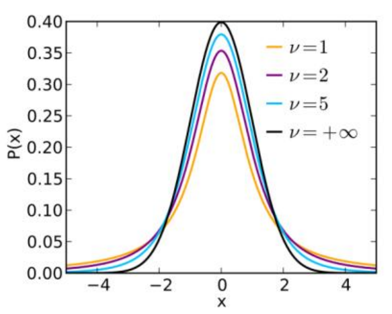
s: desvio padrão conjunto

- **Variâncias diferentes e desconhecidas:**

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

$$\nu = \frac{[(s_1^2/n_1) + (s_2^2/n_2)]^2}{[(s_1^2/n_1)^2/(n_1-1) + (s_2^2/n_2)^2/(n_2-1)]}$$

Nota: Esta variável T tem distribuição t-Student com *v* graus de liberdade (g.l.´s). O valor dos g.l.´s é calculado através desta fórmula, sendo arredondado para baixo para o inteiro mais próximo.



Nos primeiros 6 meses de vida dois grupos aleatórios de crianças seguiram esquemas de alimentação diferentes: o grupo 1 seguiu o esquema A e o grupo 2 seguiu o esquema B. No quadro seguinte apresentam-se os ganhos em peso, em kg, dessas crianças.

Grupo 1	2,7	3,2	3,6	4,1	2,7	3,2	4,5	3,6	2,7
Grupo 2	4,1	4,5	3,6	2,7	3,6	3,2	4,1		

Sabe-se que as crianças dos dois grupos tinham, ao nascer, aproximadamente pesos iguais.

Admita que as distribuições dos pesos seguem a distribuição Normal com variâncias 0,36 e 0,32, respectivamente.

a) Ao nível de significância de 1%, poderá afirmar que o ganho médio em peso das crianças alimentadas segundo o esquema A é:

   i. Igual ao das crianças alimentadas segundo o esquema B?

   ii. Superior ao das crianças alimentadas segundo o esquema B?

   iii. Inferior ao das crianças alimentadas segundo o esquema B?

b) A partir de que nível de significância rejeita cada uma das hipóteses anteriores?

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Conhecidas)

Sejam:

- X_1 a v.a. que representa o ganho em peso, em kg, das crianças alimentadas segundo o esquema A,
- X_2 a v.a. que representa o ganho em peso, em kg, das crianças alimentadas segundo o esquema B,

com $X_1 \sim N\left(\mu_1 = ?\,; \sigma_1 = \sqrt{0,36}\right)$ e $X_2 \sim N\left(\mu_2 = ?; \sigma_2 = \sqrt{0,32}\right)$.

$n_1 = 9, \qquad \bar{x}_1 = 3,3367;$

$n_2 = 7, \qquad \bar{x}_2 = 3,6857.$

a) $\alpha = 1\%$.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a) (i): Teste de Hipóteses para μ$_1$ - μ$_2$ (Variâncias Conhecidas)

Hipóteses:

i) $\mu_1 = \mu_2$?

$H_0: \mu_1 = \mu_2 \ vs \ H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \ vs \ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ (teste bilateral).

Estatística de Teste:

Estatística de teste:

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0;1).$$

$$z_{obs} = \frac{(3{,}3667 - 3{,}6857) - 0}{\sqrt{\frac{0{,}36}{9} + \frac{0{,}32}{7}}} = -1{,}0896.$$

Decisão (pela região de rejeição):

Pela tabela $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}995} = 2{,}576$.

Logo, $R.A.:]-2{,}576;\ 2{,}576[$ e $R.R.:]-\infty;\ -2{,}576] \cup [2{,}576;+\infty[$.

Como $z_{obs} \in R.A.$ não rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 1%, não existe evidência estatística de que o ganho médio em peso das crianças alimentadas segundo o esquema A seja diferente do das crianças alimentadas segundo o esquema B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a) (ii): Teste de Hipóteses para μ_1 - μ_2 (Variâncias Conhecidas)

ii) $\mu_1 > \mu_2$?

Hipóteses:

$H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \; vs. H_1: \mu_1 > \mu_2$
$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \; vs. H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$ (teste unilateral direito).

Estatística de Teste:

Estatística de teste:

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0;1).$$

Decisão (pela região de rejeição):

Como a estatística de teste é a mesma da alínea anterior, $z_{obs} = -1{,}0896$.

Pela tabela $z_{1-\alpha} = z_{0,99} = 2{,}326$. Logo, $R.A.:]-\infty;\ 2{,}326[$ e $R.R.: [2{,}326; +\infty[$.

Como $z_{obs} \in R.A.$ não rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 1%, não existe evidência estatística de que o ganho médio em peso das crianças alimentadas segundo o esquema A seja superior ao das crianças alimentadas segundo o esquema B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a) (iii): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Conhecidas)

Hipóteses:

iii) $\mu_1 < \mu_2$?

$H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \; vs \; H_1: \mu_1 < \mu_2$
$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0 \; vs \; H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$ (teste unilateral esquerdo).

Estatística de Teste:

Estatística de teste: $Z = \dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0; 1)$.

Decisão (pela região de rejeição):

Como a estatística de teste é a mesma da alínea anterior, $z_{obs} = -1{,}0896$.

Pela tabela $z_{1-\alpha} = z_{0,99} = 2{,}326$. Logo, $R.A.:]-2{,}326; +\infty[$ e $R.R.:]-\infty; -2{,}326]$.

Como $z_{obs} \in R.A.$ não rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 1%, não existe evidência estatística de que o ganho médio em peso das crianças alimentadas segundo o esquema A seja inferior ao das crianças alimentadas segundo o esquema B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (b) (i) e (ii): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Conhecidas)

b) valor $p = P(\text{Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira}) = P(Z_{obs} \in R.R. | \mu = \mu_0)$.

i) valor $p = 2 \times P(Z \geq |z_{obs}|) = 2 \times P(Z \geq 1{,}0896) = 2 \times \left(1 - \Phi(1{,}0896)\right)$
$= 2 \times (1 - 0{,}8621) = 0{,}2758$.

Decisão (pela valor-p):

A hipótese $H_0: \mu_1 = \mu_2$ é rejeitada para níveis de significância superiores ou iguais a 27,58%, logo não é rejeitada para qualquer nível de significância usual em investigação: não existe evidência estatística de que o ganho médio de peso das crianças alimentadas segundo o esquema A seja diferente do das crianças alimentadas segundo o esquema B.

ii) valor $p = P(Z \geq z_{obs}) = P(Z \geq -1{,}0896) = 1 - \Phi(-1{,}0896)$
$= 1 - \left(1 - \Phi(1{,}0896)\right) = \Phi(1{,}0896) = 0{,}8621$.

Decisão (pela valor-p):

Alternativa, com base no valor p bilateral calculado na alínea i): substituindo em H_1 μ_1 e μ_2 por $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$, respectivamente, $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 3{,}3367 - 3{,}6857 > 0$ dá uma proposição falsa. Logo,

$$\text{valor } p_{uni} = 1 - \frac{0{,}2758}{2} = 0{,}8621.$$

A hipótese $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$ é rejeitada para níveis de significância superiores ou iguais a 86,21%. Assim, não existe evidência estatística de que o ganho médio de peso das crianças alimentadas segundo o esquema A seja superior ao das crianças alimentadas segundo o esquema B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (b) (iii): Teste de Hipóteses para μ_1 - μ_2 (Variâncias Conhecidas)

Decisão (pela valor-p):

iii) $valor\ p = P(Z \leq z_{obs}) = P(Z \leq -1{,}0896) = \Phi(-1{,}0896) = 1 - \Phi(1{,}0896)$
$= 1 - 0{,}8621 = 0{,}1379.$

Alternativa, com base no valor p bilateral calculado na alínea i): substituindo em H_1 μ_1 e μ_2 por $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$, respectivamente, $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 3{,}3367 - 3{,}6857 > 0$ dá uma proposição verdadeira. Logo,

$$\text{valor } p_{uni} = \frac{0{,}2758}{2} = 0{,}1379.$$

A hipótese H_0: $\mu_1 \geq \mu_2$ é rejeitada para níveis de significância superiores ou iguais a 13,79%: não existe evidência estatística de que o ganho médio de peso das crianças alimentadas segundo o esquema A seja inferior ao das crianças alimentadas segundo o esquema B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Murteira et al (2015)
Capítulo 8

31. Uma repartição de Finanças tem dois funcionários a receber declarações de IRS. Admita que o tempo que cada funcionário leva a atender uma pessoa tem distribuição normal, com desvios padrões iguais a 2 minutos. O Sr. Antunes, ao chegar para entregar a sua declaração, nota que a fila junto ao balcão *A* tem 20 pessoas, enquanto a fila junto ao balcão *B* tem 15 pessoas, e opta, naturalmente, por esta. Ao começar a ser atendido (um hora e quinze minutos depois) repara que a vigésima pessoa da fila ao lado tinha justamente acabado de ser atendida. Pode afirmar-se que o tempo médio gasto pelos dois funcionários a atender uma pessoa é idêntico? (Considere as dimensões 0.05 e 0.1).

Exercício 31

$X_i \equiv$ tempo (em minutos) que o funcionário i demora a atender uma pessoa $(i = A, B)$.

$X_A \sim N(\mu_A, 2^2) \quad n_A = 20 \quad \bar{x}_A = \frac{75}{20} = 3.75$

$X_B \sim N(\mu_B, 2^2) \quad n_B = 15 \quad \bar{x}_B = \frac{75}{15} = 5$

$H_0: \mu_A - \mu_B = 0 \quad \text{VS} \quad H_1: \mu_A - \mu_B \neq 0$

$\alpha_1 = 0.05 \quad \alpha_2 = 0.1$

Exercício 31

Estatística - teste:

$$Z = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B - (\mu_{A_0} - \mu_{B_0})}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}} \sim N(0,1)$$

sob H_0, $$Z = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}} \sim N(0,1)$$

$$z_{obs} = \frac{3.75 - 5}{\sqrt{\frac{2^2}{20} + \frac{2^2}{15}}} \simeq -1.83$$

Exercício 31

$$P_{obs} = 2P\left(Z > |z_{obs}|\right) = 2P\left(Z > 1.83\right) =$$

$$= 2\left(1 - \Phi(1.83)\right) = 2\left(1 - 0.9664\right) =$$

$$= 0.0672$$

Conclusão:

$P_{obs} > \alpha_1 = 0.05$ não se rejeita H_0.

$P_{obs} < \alpha_2 = 0.1$ rejeita-se H_0.

Testes de Hipóteses para μ_1 - μ_2 (Variâncias Desconhecidas e Iguais)

6

Hipóteses, Estatística de Teste e Decisão
(Amostras Independentes)

Um determinado método de análise permite determinar o conteúdo de enxofre no petróleo bruto. Os ensaios efectuados em 10 e 8 amostras aleatórias de 1 kg de petróleo bruto, provenientes de furos pertencentes respectivamente aos campos A e B, revelaram os seguintes resultados (em gramas):

Campo A:	111	114	105	112	107	109	112	110	110	106
Campo B:	109	103	101	105	106	108	110	104		

a) Ao nível de significância de 10%, poderá afirmar que, em média, quantidade de enxofre por quilograma de petróleo do campo A é:

i. Igual à do campo B?

ii. Superior à do campo B?

iii. Inferior à do campo B?

b) Calcule o $valor\ p$ associado a cada um dos testes anteriores.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a) (i): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Desconhecidas e Iguais)

Sejam:

- X_1 a v.a. que representa a quantidade de enxofre por quilograma de petróleo do campo A,
- X_2 a v.a. que representa a quantidade de enxofre por quilograma de petróleo do campo B.

Nada é referido sobre a distribuição de X_1 e X_2.

$n_1 = 10,\quad \bar{x}_1 = 109{,}6 \quad \text{e} \quad s_1 = 2{,}875,$
$n_2 = 8,\quad \bar{x}_2 = 105{,}75 \quad \text{e} \quad s_2 = 3{,}105.$

a) $\alpha = 10\%$.

i) $\mu_1 = \mu_2$?

Hipóteses:

$H_0\!: \mu_1 = \mu_2 \; vs \; H_1\!: \mu_1 \neq \mu_2$
$\Leftrightarrow H_0\!: \mu_1 - \mu_2 = 0 \; vs \; H_1\!: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ (teste bilateral).

Para saber decidir qual a estatística de teste a utilizar, é preciso validar os pressupostos subjacentes:

- Normalidade:

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a) (i): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Desconhecidas e Iguais)

- Igualdade das variâncias:

O I. C. a 90% para $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ é dado por:

$$\left]\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{n_1-1;n_2-1;1-\frac{\alpha}{2}}};\frac{S_1^2}{S_2^2}F_{n_2-1;n_1-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right[.$$

Ver Tabela no Slide a seguir

Substituindo os valores, sendo $F_{9;\,7;0,95} = 3{,}68$ e $F_{7;\,9;0,95} = 3{,}29$, obtém-se:

$$\left]\frac{2{,}875^2}{3{,}105^2}\times\frac{1}{3{,}68};\frac{2{,}875^2}{3{,}105^2}\times 3{,}29\right[=]0{,}2332;2{,}8230[.$$

Como 1 pertence ao intervalo obtido, ao nível de significância de 10% não há evidências de que σ_1^2 seja diferente de σ_2^2. Portanto, pode-se considerar que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Cálculo do Quantil da Distribuição F-Snedecor de Probabilidade 1-α/2 e com n1 e n2 g.l.´s

$$F_{m,n,\varepsilon} : P(X > F_{m,n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

$F_{9;\,7;0,95} = 3{,}68$ e $F_{7;\,9;0,95} = 3{,}29$,

m - graus de liberdade do numerador

n – graus de liberdade do denominador

n	ε	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	.100	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
	.050	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.90	245.95	248.02	249.05	250.10	251.14	252.20	253.25	254.32
	.025	647.79	799.48	864.15	899.60	921.83	937.11	948.20	956.64	963.28	968.63	976.72	984.87	993.08	997.27	1001.40	1005.60	1009.79	1014.04	1018.26
	.010	4052.18	4999.34	5403.53	5624.26	5763.96	5858.95	5928.33	5980.95	6022.40	6055.93	6106.68	6156.97	6208.66	6234.27	6260.35	6286.43	6312.97	6339.51	6365.59
2	.100	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
	.050	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
	.025	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
	.010	98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.48	99.48	99.49	99.50
3	.100	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
	.050	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
	.025	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
	.010	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	.100	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
	.050	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
	.025	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
	.010	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	.100	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.11
	.050	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
	.025	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
	.010	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	.100	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
	.050	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
	.025	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
	.010	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	.100	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
	.050	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
	.025	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.41	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
	.010	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	.100	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
	.050	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
	.025	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
	.010	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	.100	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
	.050	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
	.025	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
	.010	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31

Exercício (a) (i): Teste de Hipóteses para μ₁ - μ₂ (Variâncias Desconhecidas e Iguais)

Estatística de Teste:

Deste modo, a estatística de teste a usar é:

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2=10+8-2=16}.$$

$$t_{obs} = \frac{(109{,}6 - 105{,}75) - 0}{\sqrt{\frac{(10-1)2{,}875 + (8-1)3{,}105}{10+8-2}}\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}}} = 2{,}7255.$$

Decisão (pela região de rejeição):

Pela tabela $t_{n_1+n_2-2;\,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{16\,;\,0{,}95} = 1{,}746.$

Logo, $R.A.:]-1{,}746;\ 1{,}746[$ e $R.R.:]-\infty;\ -1{,}746] \cup [1{,}746; +\infty[$.

Como $t_{obs} \in R.R.$ rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 10%, existe evidência estatística de que, em média, a quantidade de enxofre por quilograma de petróleo do campo A é diferente da do campo B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a) (ii): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Desconhecidas e Iguais)

ii) $\mu_1 > \mu_2$?

Hipóteses:

$H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \; vs \; H_1: \mu_1 > \mu_2$
$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \; vs \; H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$ (teste unilateral direito).

Estatística de Teste:

Estatística de teste:

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2=10+8-2=16}.$$

Como a estatística de teste é a mesma da alínea anterior, $t_{obs} = 2{,}7255$.

Decisão (pela região de rejeição):

Pela tabela $t_{n_1+n_2-2;\,1-\alpha} = t_{16;\,0{,}90} = 1{,}337$.
Logo, $R.A.:]-\infty;\ 1{,}337[$ e $R.R.: [1{,}337; +\infty[$.

Como $t_{obs} \in R.R.$ rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 10%, existe evidência estatística de que, em média, a quantidade de enxofre por quilograma de petróleo do campo A é superior à do campo B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a) (iii): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Desconhecidas e Iguais)

Hipóteses:

iii) $\mu_1 < \mu_2$?

$H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \; vs \; H_1: \mu_1 < \mu_2$
$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0 \; vs \; H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$ (teste unilateral esquerdo).

Estatística de Teste:

Estatística de teste:

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2=10+8-2=16}.$$

Como a estatística de teste é a mesma da alínea anterior, $t_{obs} = 2{,}7255$.

Decisão (pela região de rejeição):

Pela tabela $t_{n_1+n_2-2;\,1-\alpha} = t_{16\,;\,0{,}90} = 1{,}337$.
Logo, $R.A.:]-1{,}337; +\infty[$ e $R.R.:]-\infty; -1{,}337]$.

Como $t_{obs} \in R.A.$ não rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 10%, não existe evidência estatística de que, em média, a quantidade de enxofre por quilograma de petróleo do campo A seja inferior à do campo B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (b): Teste de Hipóteses para μ_1 - μ_2 (Variâncias Desconhecidas e Iguais)

Decisão (pela valor-p):

b) valor $p = P(\text{Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira}) = P(Z_{obs} \in R.R. | \mu = \mu_0)$.

i) valor $p = 2 \times P(T \geq |t_{obs}|) = 2 \times P(T \geq 2{,}7255) = 2 \times \left(1 - P(T < 2{,}7255)\right)$
$= 2 \times (1 - 0{,}9925) = 0{,}015$.

A hipótese $H_0: \mu_1 = \mu_2$ é rejeitada para níveis de significância superiores ou iguais a 1,5%. Logo, para um nível de significância de 5% existe evidência de que o teor médio de enxofre no campo A é diferente do campo B, mas para 1% essa afirmação já não pode ser sustentada. Repare-se que o *valor p* calculado é o valor indicado no quadro de resultados do SPSS anteriormente apresentado.

ii) valor $p = P(T \geq t_{obs}) = P(T \geq 2{,}7255) = 1 - P(T < 2{,}7255) = 1 - 0{,}9925 = 0{,}0075$.
Alternativa, com base no *valor-p* bilateral calculado na alínea i): substituindo em H_1 μ_1 e μ_2 por $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$, respectivamente, $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 109{,}6 - 105{,}75 > 0$ dá uma proposição verdadeira. Logo,

$$valor\text{-}p_{uni} = \frac{0{,}015}{2} = 0{,}0075.$$

A hipótese $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$ é rejeitada para níveis de significância superiores ou iguais a 0,75%. Assim, para qualquer nível de significância sensato/usual ($\leq 10\%$) existe evidência de que o teor médio de enxofre no campo A é superior ao do campo B.

iii) valor $p = P(T \leq t_{obs}) = P(T \leq 2{,}7255) = 0{,}9925$.
Alternativa, com base no *valor-p* bilateral calculado na alínea i): substituindo em H_1 μ_1 e μ_2 por $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$, respectivamente, $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 109{,}6 - 105{,}75 > 0$ dá uma proposição falsa. Logo,

$$\text{valor } p_{uni} = 1 - \frac{0{,}015}{2} = 0{,}9925.$$

A hipótese $H_0: \mu_1 \geq \mu_2$ é rejeitada para níveis de significância superiores ou iguais a 99,25. Assim, existe não existe evidência de que o teor médio de enxofre no campo A seja inferior ao do campo B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Murteira et al (2015)
Capítulo 8

34. Dois programas de alimentação de gado bovino são comparados. A variável aleatória X representa o aumento de peso (em kg) de um animal alimentado segundo o programa 1, durante um mês, enquanto Y traduz o aumento de peso (em kg) de um animal alimentado segundo o programa 2, durante igual período de tempo. Sabe-se que $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, e que as variáveis são independentes.

Um grupo de 8 animais foi submetido ao primeiro programa durante um mês, tendo-se obtido

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 416 \text{ e } \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 21807.$$

Outro grupo de 10 animais foi submetido ao segundo programa durante um mês, tendo-se obtido

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = 468 \text{ e } \sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 22172.$$

a) Teste, ao nível de 0.05, a igualdade entre as variâncias.
b) Teste, ao nível de 0.05, a igualdade entre os valores médios supondo variâncias iguais.
c) Teste, ao nível de 0.05, a igualdade entre os valores médios supondo variâncias diferentes.
d) Qual dos procedimentos adoptados nas alíneas anteriores, para testar a igualdade de médias, lhe parece mais adequado?

7

Testes de Hipóteses para μ_1 - μ_2 (Variâncias Desconhecidas e Diferentes)

Hipóteses, Estatística de Teste e Decisão (Amostras Independentes)

Para um estudo sobre a caracterização da altura da população portuguesa, foi recolhida uma amostra de 1861 pessoas, com as seguintes características: (conjunto de dados semelhante ao disponibilizado no Capítulo 12, mas com uma amostra de maior dimensão):

Group Statistics

	Sexo	N	Mean	Std. Deviation
Altura	Masculino	853	168,46	7,617
	Feminino	1007	158,48	6,652

Supondo a Normalidade das distribuições e assumindo que as variâncias populacionais são desconhecidas e diferentes, verifique se se pode considerar que as alturas médias dos homens e das mulheres são iguais, com 95% de confiança.

a) Suspeita que em média a altura dos homens não é igual à das mulheres. Teste esta hipótese ao nível de significância de 5%.
b) Calcule o valor p associado ao teste da alínea anterior.
c) Teste a hipótese de a média da altura dos homens ser superior à das mulheres, ao nível de significância de 0,5%?
d) Determine o valor p associado ao teste anterior.
e) Ao nível de significância de 2,5%, pode-se afirmar que em média a altura dos homens é superior à das mulheres?
f) A partir de que nível de significância é rejeitada a hipótese do teste anterior?

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a): Teste de Hipóteses para μ_1 - μ_2 (Variâncias Desconhecidas e Diferentes)

Sejam:

- X_1 a v.a. que representa a altura dos homens,
- X_2 a v.a. que representa a altura das mulheres,

com $X_1 \sim N(\mu_1 = ?\,; \sigma_1 = ?)$ e $X_2 \sim N(\mu_2 = ?; \sigma_2 = ?)$, mas $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

$n_1 = 853, \quad \bar{x}_1 = 168{,}46 \quad$ e $\quad s_1 = 7{,}617,$
$n_2 = 1007, \quad \bar{x}_2 = 158{,}48 \quad$ e $\quad s_2 = 6{,}652.$

a) $\alpha = 5\%, \mu_1 \neq \mu_2$?

Hipóteses:

$H_0: \mu_1 = \mu_2 \; vs H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \; vs \; H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ (teste bilateral).

Estatística de Teste:

Estatística de teste:

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \overset{\circ}{\sim} t_v, \text{ onde } v = \left[\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1}\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2} \right].$$

$$t_{obs} = \frac{(168{,}46 - 158{,}48) - 0}{\sqrt{\frac{7{,}617^2}{853} + \frac{6{,}652^2}{1007}}} = 29{,}816.$$

$$v = \left[\frac{\left(\frac{7{,}617^2}{853} + \frac{6{,}652^2}{1007}\right)^2}{\frac{1}{853 - 1}\left(\frac{7{,}617^2}{853}\right)^2 + \frac{1}{1007 - 1}\left(\frac{6{,}652^2}{1007}\right)^2} \right] = [1705{,}6] = 1705.$$

Decisão (pela região de rejeição):

Pela tabela $t_{v;\, 1-\frac{\alpha}{2}} = t_{1705\,;\,0{,}975} = 1{,}96$.

Logo, $R.A.:]-1{,}96;\; 1{,}96[$ e $R.R.:]-\infty;\; -1{,}96] \cup [1{,}96; +\infty[$.

Como $t_{obs} \in R.R.$ rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 5%, existe evidência estatística de existe diferença significativa entre as médias das alturas dos homens e das mulheres.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (b): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Desconhecidas e Diferentes)

Decisão (pela valor-p):

b) valor $p = 2 \times P(T \geq |t_{obs}|) = 2 \times P(T \geq 29{,}816) = 2 \times \big(1 - P(T < 29{,}816)\big)$
$\approx 2 \times (1 - 1) = 0.$

Logo, aos níveis usuais de significância existe evidência de que a média das alturas dos homens difere das mulheres. Repare-se que o valor p calculado é o valor indicado no quadro de resultados do SPSS anteriormente apresentado.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (c): Teste de Hipóteses para μ$_1$ - μ$_2$ (Variâncias Desconhecidas e Diferentes)

Hipóteses:

c) $\alpha = 0{,}5\%, \mu_1 > \mu_2$?

$$H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \; vs \; H_1: \mu_1 > \mu_2$$

$$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \; vs \; H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0 \text{ (teste unilateral direito).}$$

Estatística de Teste:

Estatística de teste:

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \overset{\circ}{\sim} t_v, \text{ onde } v = \left[\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1}\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2} \right].$$

Como a estatística de teste é a mesma da alínea anterior, $t_{obs} = 29{,}816$ e $v = 1705$.

Decisão (pela região de rejeição):

Pela tabela $t_{v;\,1-\alpha} = t_{1705\,;\,0{,}995} = 2{,}576$.
Logo, $R.A.:]-\infty;\ 2{,}576[$ e $R.R.: [2{,}576; +\infty[$.

Como $t_{obs} \in R.R.$ rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 0,5%, existe evidência estatística de que, em média, os homens são mais altos do que as mulheres.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (d): Teste de Hipóteses para μ_1 - μ_2 (Variâncias Desconhecidas e Diferentes)

Decisão (pela valor-p):

d) valor $p = P(T \geq t_{obs}) = P(T \geq 29{,}816\,) = 1 - P(T < 29{,}816\,) \approx 1 - 1 = 0$

Alternativa, com base no *valor-p* bilateral calculado na alínea i): substituindo em H_1 μ_1 e μ_2 por $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$, respectivamente, $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 168{,}46 - 158{,}48 > 0$ dá uma proposição verdadeira. Logo,

$$\text{valor } p_{uni} \approx \frac{0}{2} = 0.$$

A hipótese $H_0\!: \mu_1 \leq \mu_2$ é rejeitada para níveis de significância de aproximadamente 0. Assim, para qualquer nível de significância sensato/usual ($\leq 10\%$) existe evidência de que em média os homens são mais altos do que as mulheres.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (e): Teste de Hipóteses para μ_1 - μ_2 (Variâncias Desconhecidas e Diferentes)

Hipóteses:

e) $\alpha = 2{,}5\%$, $\mu_1 < \mu_2$?

$$H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \ vs \ H_1: \mu_1 < \mu_2$$

$$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0 \ vs \ H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0 \text{ (teste unilateral esquerdo).}$$

Estatística de Teste:

Estatística de teste:

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \overset{\circ}{\sim} t_v, \text{ onde } v = \left[\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1}\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2} \right].$$

Como a estatística de teste é a mesma da alínea anterior, $t_{obs} = 29{,}816$ e $v = 1705$.

Decisão (pela região de rejeição):

Pela tabela $t_{v;\,1-\alpha} = t_{1705\,;\,0{,}975} = 1{,}96$.
Logo, $R.A.:]-1{,}96; +\infty[$ e $R.R.:]-\infty; -1{,}96]$.

Como $t_{obs} \in R.A.$ não rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 2,5%, não existe evidência estatística de que, em média, a altura dos homens seja inferior à das mulheres.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (f): Teste de Hipóteses para μ_1 - μ_2 (Variâncias Desconhecidas e Diferentes)

Decisão (pela valor-p):

f) valor $p = P(T \leq t_{obs}) = P(T \leq 29{,}816\,) \approx 1$.

Alternativa, com base no *valor-p* bilateral calculado na alínea i): substituindo em H_1 μ_1 e μ_2 por $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$, respectivamente, $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 168{,}46 - 158{,}48 > 0$ dá uma proposição falsa. Logo,

$$\text{valor } p_{uni} \approx 1 - \frac{0}{2} = 1.$$

A hipótese H_0: $\mu_1 \geq \mu_2$ é rejeitada para níveis de significância de aproximadamente 1. Assim, para qualquer nível de significância sensato/usual ($\leq 10\%$) não existe evidência de que em média a altura dos homens seja inferior à das mulheres.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Murteira et al (2015)
Capítulo 8

34. Dois programas de alimentação de gado bovino são comparados. A variável aleatória X representa o aumento de peso (em kg) de um animal alimentado segundo o programa 1, durante um mês, enquanto Y traduz o aumento de peso (em kg) de um animal alimentado segundo o programa 2, durante igual período de tempo. Sabe-se que $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, e que as variáveis são independentes.
Um grupo de 8 animais foi submetido ao primeiro programa durante um mês, tendo-se obtido

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 416 \text{ e } \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 21807.$$

Outro grupo de 10 animais foi submetido ao segundo programa durante um mês, tendo-se obtido

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = 468 \text{ e } \sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 22172.$$

a) Teste, ao nível de 0.05, a igualdade entre as variâncias.
b) Teste, ao nível de 0.05, a igualdade entre os valores médios supondo variâncias iguais.
c) Teste, ao nível de 0.05, a igualdade entre os valores médios supondo variâncias diferentes.
d) Qual dos procedimentos adoptados nas alíneas anteriores, para testar a igualdade de médias, lhe parece mais adequado?

Obrigada!

Questões?